На первых лекциях по дифурам рассказывается и доказывается много теорем существования и единственности решения ОДУ. Мне хочется, не доказывая их, показать читателю, почему они **очевидны**.

Рассмотрим ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y,t) \\ y|_{t=0} = y_0 \end{cases}$$

Как бы вы стали её решать численно?

Нужно взять некий малый интервал времени Δt. Тогда

$$y(t+\Delta t) - y(t) = f(y,t)$$

Т.е.

$$y(t+\Delta t) = y(t) + f(y,t)$$

Создавим табличку:

Момент времени	y	f(y,t)
t=0	y_0	
t=Δt		

Вычислим $f(y,t)$ в начальный момент времени:

Момент времени	y	f(y,t)
t=0	y_0	$f(y,0)$
t=Δt		

Благодаря этому по формуле $y(t+\Delta t) = y(t) + f(y,t)$ вычисляем Δt в следующий момент времени:

Момент времени	y	f(y,t)
t=0	y_0	$f(y,0)$
t=Δt	$y_1 = y(t) + f(y,t)$	

Повторяем процесс, чтобы получить значение функции уже в момент времени $2\Delta t$:

Момент времени	y	f(y,t)
t=0	y_0	$f(y,0)$
t=Δt	$y_1 = y_0 + f(y,0)$	$f(y,\Delta t)$
t=$2\Delta t$	$y_2 = y_1 + f(y,\Delta t)$	

И так далее.

Могут ли у нас возникнуть проблемы? Да, если решение устремится к бесконечности. Недаром в теореме говорят «решение существует на НЕКОТОРОМ отрезке». Предположим, что решением является тангенс. Тогда на отрезке [0..1] решение будет. А вот на отрезке [0..2] – уже нет, т.к. уже на π/2 тангенс улетит на бесконечность.

А вот с единственностью всё хорошо. У нас нигде не будет ситуации «ой, у нас получилось две возможных координаты». Не будет нигде точки бифуркации:

А что, если ДУ уже второго порядка?

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f(x, \dfrac{dx}{dt}, t) \\ x|_{t=0} = x_0 \\ \dfrac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0 \end{cases}$$

Эта система естественным образом возникает при решении второго закона Ньютона:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)}{m} = f(x, \frac{dx}{dt}, t)$$

Тогда надо добавить в таблицу ещё один столбец:

Момент времени	x	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}, t)$
t=0	x_0	v_0	
t=Δt			

Чтобы понять, что будет через момент времени Δt, нужно подсчитать ускорение в начальный момент времени:

Момент времени	x	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}, t)$
t=0	x_0	v_0	$f(x_0, v_0, 0)$
t=Δt			

Благодаря нему мы можем подсчитать изменение скорости к моменту времени Δt:

Момент времени	x	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}, t)$
t=0	x_0	v_0	$f(x_0, v_0, 0)$
t=Δt		$v_0 + f(x_0, v_0, 0)\Delta t$	

А теперь считаем координату в момент времени Δt:

Момент времени	x	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}, t)$
t=0	x_0	v_0	$f(x_0, v_0, 0)$
t=Δt	$x_0 + v_0\Delta t$	$v_0 + f(x_0, v_0, 0)\Delta t$	

Теперь нужно готовиться к моменту времени $2\Delta t$. Считаем новое ускорение:

Момент времени	x	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}, t)$
t=0	x_0	v_0	$f(x_0, v_0, 0)$
t=Δt	$x_0 + v_0\Delta t$	$v_0 + f(x_0, v_0, 0)\Delta t$	$f(x(\Delta t), \frac{dx}{dt}(\Delta t), \Delta t)$

Благодаря нему понимаем, как считать ускорение к моменту времени Δt:

Момент времени	x	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}, t)$
t=0	x_0	v_0	$f(x_0, v_0, 0)$
t=Δt	$x_0 + v_0\Delta t$	$v_0 + f(x_0, v_0, 0)\Delta t$	$f(x(\Delta t), \frac{dx}{dt}(\Delta t), \Delta t)$
t=$2\Delta t$		$v_0 + f(x_0, v_0, 0)\Delta t +$ $f(x(\Delta t), \frac{dx}{dt}(\Delta t), \Delta t)\Delta t$	

И координата:

Момент времени	x	$\frac{dx}{dt}$	$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt}, t)$
t=0	x_0	v_0	$f(x_0, v_0, 0)$
t=Δt	$x_0 + v_0\Delta t$	$v_0 + f(x_0, v_0, 0)\Delta t$	$f(x(\Delta t), \frac{dx}{dt}(\Delta t), \Delta t)$
t=$2\Delta t$	$x_0 + v_0\Delta t + (v_0 + f(x_0, v_0, 0)\Delta t)\Delta t$	$v_0 + f(x_0, v_0, 0)\Delta t +$ $f(x(\Delta t), \frac{dx}{dt}(\Delta t), \Delta t)\Delta t$	

И так далее.

Именно так природа «просчитывает» движение тел. Опять-таки, мы можем улететь на бесконечность, но не сразу. А точкам бифуркации вновь неоткуда взяться. У нас в Ньютоновом формализме нет случайности – всё предопределено. Потому что решение дифура единственно!

А что, если у нас больше переменных? Например, (для простоты возьмём дифуры первого порядка)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} = Y(x, y, t) \\ x|_{t=0} = x_0 \\ y|_{t=0} = y_0 \end{cases}$$

Давайте я просто покажу, как будет заполняться таблица:

Было:

Момент времени	x	$\frac{dx}{dt} = X(x,y,t)$	y	$\frac{dy}{dt} = Y(x,y,t)$
t=0	x_0		y_0	
t=Δt				

Считаем скорости в начальный момент времени:

Момент времени	x	$\frac{dx}{dt} = X(x,y,t)$	y	$\frac{dy}{dt} = Y(x,y,t)$
t=0	x_0	$X(x,y,0)$	y_0	$Y(x,y,0)$
t=Δt				

А затем то, что будет к моменту времени Δt:

Момент времени	x	$\frac{dx}{dt} = X(x,y,t)$	y	$\frac{dy}{dt} = Y(x,y,t)$
t=0	x_0	$X(x,y,0)$	y_0	$Y(x,y,0)$
t=Δt	$x_0 + X(x,y,0)\Delta t$		$x_0 + Y(x,y,0)\Delta t$	

И вновь мы видим, как всё чин-чинарём просчитывается, никаких точек бифуркации нет – решение будет единственно и существовать, если не улетит не бесконечность.

Естественно, всё сказанное выше не является строгим доказательством, но важно для понимания этих теорем существования и единственности, и как вообще человечество их придумало.